Tragom jedne nejednakosti o brojevnim sredinama

Dragoljub Milošević[1]

Poznata nam je nejednakost između aritmetičke i kvadratne sredine dva pozitivna broja a i b:

$$\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}, \quad \text{tj.} \quad A(a,b) \leq K(a,b).$$

Sada, budući da vrijedi

$$\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}\right) \geq \frac{a+b}{2} \iff \frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a} \geq a+b$$

$$\iff a^3+b^3 \geq ab(a+b) \iff a^2-ab+b^2 \geq ab \iff (a-b)^2 \geq 0,$$

zaključujemo $A\left(\frac{a^2}{b},\frac{b^2}{a}\right) \geq A(a,b)$. Znak jednakosti vrijedi ako i samo ako $a=b$.

Postavljamo pitanje:

Vrijedi li $A\left(\frac{a^2}{b},\frac{b^2}{a}\right) \leq K(a,b)$ *ili* $A\left(\frac{a^2}{b},\frac{b^2}{a}\right) \geq K(a,b)$*?*

Ako, npr. stavimo $a=7$ i $b=1$, dobijemo:

$$A\left(\frac{a^2}{b},\frac{b^2}{a}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{7^2}{1}+\frac{1^2}{7}\right) = 24\frac{4}{7},$$

$$K(a,b) = \sqrt{\frac{7^2+1^2}{2}} = 5,$$

pa vrijedi $A\left(\frac{a^2}{b},\frac{b^2}{a}\right) \geq K(a,b)$ za $a=7$ i $b=1$. Dokazat ćemo da ova nejednakost vrijedi za sve pozitivne brojeve a i b.

---

[1] Autor je profesor matematike u srednjoj školi u Gornjem Milanovcu.

Teorem 1. Za a, $b > 0$, vrijedi $A\left(\frac{a^2}{b}, \frac{b^2}{a}\right) \geq K(a,b)$.

Dokaz 1. Dana nejednakost ekvivalentna je sljedećoj

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} \geq \sqrt{2(a^2+b^2)}. \tag{1}$$

Dokažimo pomoćnu nejednakost

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} \geq \frac{(a^2+b^2)^2}{ab(a+b)}. \tag{2}$$

Imamo:

$$\begin{aligned}\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} - \frac{(a^2+b^2)^2}{ab(a+b)} &= \frac{a^3(a+b) + b^3(a+b) - (a^2+b^2)^2}{ab(a+b)}\\ &= \frac{a^2+b^2-2ab}{a+b} = \frac{(a-b)^2}{a+b} \geq 0,\end{aligned}$$

pa vrijedi (2).

Iz (2) imamo

$$\begin{aligned}\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} &\geq \frac{2ab(a^2+b^2)}{ab(a+b)} = \frac{2(a^2+b^2)}{a+b}\\ &\geq \frac{2(a^2+b^2)}{\sqrt{2(a^2+b^2)}} = \sqrt{2(a^2+b^2)},\end{aligned}$$

što znači da vrijedi (1), a samim tim i nejednakost $A\left(\frac{a^2}{b}, \frac{b^2}{a}\right) \geq K(a,b)$.

Dokaz 2. Nejednakost (1) je redom ekvivalentna s

$$\begin{aligned}&a^3+b^3 \geq ab\sqrt{2(a^2+b^2)}\\ \iff &(a^3+b^3)^2 \geq 2a^2b^2(a^2+b^2)\\ \iff &a^6 - 2a^4b^2 + 2a^3b^3 - 2a^2b^4 + b^6 \geq 0\\ \iff &(a^6 - a^4b^2) + (b^6 - a^2b^4) - (a^4b^2 - 2a^3b^3 + a^2b^4) \geq 0\\ \iff &a^4(a^2-b^2) + b^4(b^2-a^2) - a^2b^2(a^2-2ab+b^2) \geq 0\\ \iff &(a^2-b^2)(a^4-b^4) - a^2b^2(a-b)^2 \geq 0\\ \iff &(a-b)^2((a+b)^2(a^2+b^2) - a^2b^2) \geq 0\\ \iff &(a-b)^2(a^4 + 2a^3b + a^2b^2 + 2ab^3 + b^4) \geq 0.\end{aligned}$$

Ova nejednakost očito vrijedi, a samim tim i $A\left(\frac{a^2}{b}, \frac{b^2}{a}\right) \geq K(a,b)$.

Nadalje, dokazat ćemo i općenitiju nejednakost.

Teorem 2. Neka je a, b, $c > 0$. Tada vrijedi $A\left(\frac{a^2}{b}, \frac{b^2}{c}, \frac{c^2}{a}\right) \geq K(a,b,c)$.

Dokaz. Ekvivalentan oblik prethodne nejednakosti je

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq \sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}. \tag{3}$$

U MFL-u 4/256 (2013./2014.), na str. 238, dokazana je sljedeća nejednakost: za pozitivne brojeve a, b, c, x, y, z vrijedi:

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}. \tag{4}$$

Primjenom posljednje nejednakosti dobivamo

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} = \frac{a^4}{a^2b} + \frac{b^4}{b^2c} + \frac{c^4}{c^2a} \geq \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{a^2b+b^2c+c^2a}. \tag{5}$$

Iz A-G nejednakosti za pozitivne brojeve a, b, c imamo

$$a+b+c \leq \sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}. \tag{6}$$

Naime,

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2) &\iff ab+bc+ca \leq a^2+b^2+c^2\\ &\iff \frac{1}{2}((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2) \geq 0.\end{aligned}$$

Pokazat ćemo da vrijedi

$$a^2b+b^2c+c^2a \leq \frac{1}{3}(a+b+c)(a^2+b^2+c^2). \tag{7}$$

Ova nejednakost je ekvivalentna sa:

$$\begin{aligned}&3(a^2b+b^2c+c^2a) \leq a^3+ab^2+ac^2+ba^2+b^3+bc^2+ca^2+cb^2+c^3\\ \iff &2(a^2b+b^2c+c^2a) \leq a^3+b^3+c^3+ab^2+bc^2+ca^2\\ \iff &(a^3-a^2b)+(b^3-b^2c)+(c^3-c^2a)+(ab^2-a^2b)+(bc^2-b^2c)+(ca^2-c^2a) \geq 0\\ \iff &a^2(a-b)+b^2(b-c)+c^2(c-a)+ab(b-a)+bc(c-b)+ca(a-c) \geq 0\\ \iff &(a-b)(a^2-ab)+(b-c)(b^2-bc)+(c-a)(c^2-ca) \geq 0\\ \iff &a(a-b)^2+b(b-c)^2+c(c-a)^2 \geq 0,\end{aligned}$$

odakle, zaključujemo da vrijedi (7).

Sada iz (5), korištenjem (6) i (7) imamo

$$\begin{aligned}\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} &\geq \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{\frac{1}{3}(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)} = \frac{3(a^2+b^2+c^2)}{a+b+c}\\ &\geq \frac{3(a^2+b^2+c^2)}{\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}} = \sqrt{3(a^2+b^2+c^2)},\end{aligned}$$

tj. vrijedi (3).

Pitanje. Vrijedi li za sve pozitivne brojeve a, b, c, d nejednakost

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{d} + \frac{d^2}{a} \geq 2\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}?$$